Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0)

der Hochschulen Baden-Württembergs
für ein Studium von WiMINT-Fächern
(Wirtschaft, Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik)

Ergebnis einer Tagung vom 05.07.2012
und einer Tagung vom 24.-26.02.2014

27. Oktober 2014

Vorwort

Das vorliegende Papier ist das Ergebnis einer Arbeitstagung an der Akademie Esslingen zum Thema „Übergangsschwierigkeiten in Mathematik an der Schnittstelle Schule zu Hochschule“, überarbeitet im Jahr 2014. Teilnehmer waren ProfessorInnen von Hochschulen für angewandte Wissenschaften und Universitäten sowie LehrerInnen der beruflichen und allgemeinbildenden Gymnasien und der Berufskollegs in Baden-Württemberg.

Bei der Abfassung der vorliegenden Version 2.0 haben auch Vertreter der Pädagogischen und der Dualen Hochschulen Baden-Württembergs mitgewirkt. Die Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule der Verbände DMV, GDM und MNU hat die Bemühungen um diesen Katalog ausdrücklich begrüßt, da Kataloge dieser Art in geeigneter Weise die Bildungsstandards konkretisieren können. Der Mindestanforderungskatalog erfährt eine breite Akzeptanz durch Hochschulen und Fachverbände.

Die Formulierung des Katalogs wurde initiiert von der Arbeitsgruppe cosh[1], die sich seit über zehn Jahren mit dem Übergang von Schule zu Hochschule beschäftigt. Bei diesem Übergang haben seit vielen Jahren die StudienanfängerInnen Probleme im Fach Mathematik. Empirische Analysen belegen, dass sich diese Problematik verschärft hat.

Bei der Tagung wurde mehrfach auf die unterschiedlichen Bildungsaufträge von Schule und Hochschule hingewiesen. In der Hochschule wird Mathematik häufig zielgerichtet als Werkzeug und Sprache zur Lösung von komplexen berufsrelevanten Problemen eingesetzt. In der Schule steht der allgemeinbildende Charakter des Mathematikunterrichts im Vordergrund. Kompetenzen wie Argumentieren, Problemlösen oder Modellieren haben in den letzten Jahren im Mathematikunterricht ein deutlich größeres Gewicht erhalten. Die Schule soll nicht nur auf ein Ingenieurstudium vorbereiten.

Durch die Hochschulreife erhalten SchülerInnen die formale Berechtigung, alle Fächer an Hochschulen studieren zu können. Offensichtlich beherrschen aber nicht alle die in der Schule vermittelten mathematischen Inhalte und Kompetenzen mit der Sicherheit, die für das Studium eines wirtschafts-, informations-, ingenieur- oder naturwissenschaftlichen Faches (im Folgenden mit WiMINT bezeichnet) erforderlich ist. Es darf aber bei einem Studienanfänger erwartet werden, dass er diese Lücken in eigener Verantwortung schließen kann. Dabei soll er von den Schulen und Hochschulen unterstützt werden. Darüber hinaus setzt die Hochschulseite in den WiMINT-Studiengängen Kenntnisse und Fertigkeiten voraus, die nicht in den Bildungsplänen der Gymnasien und Berufskollegs in Baden-Württemberg abgebildet sind. Nach Einschätzung der Teilnehmer ändern auch die beschlossenen bundesweiten Bildungsstandards nichts an dieser Diskrepanz.

Der folgende Mindestanforderungskatalog beschreibt die Kenntnisse, Fertigkeiten und Kompetenzen, die StudienanfängerInnen eines WiMINT-Studiengangs haben sollten, um das Studium erfolgreich zu starten. Diese Anforderungen werden durch Aufgabenbeispiele konkretisiert. Die Aufgaben sind keine Lehr-, Lern- oder Testaufgaben. Sie dienen lediglich der Orientierung und zur Konkretisierung/Erläuterung der Kompetenzen.
Die im folgenden Text in Klammern gesetzten Zahlen beziehen sich auf die Aufgabenbeispiele im Anhang.

[1] Cooperation Schule-Hochschule

Im Katalog sind einige Inhalte und Aufgaben besonders gekennzeichnet:
(*) nicht in den Bildungsplänen der Berufskollegs verpflichtend aufgeführt.
(**) weder in den Bildungsplänen der Berufskollegs noch der Gymnasien verpflichtend aufgeführt.

Aus drei Gründen messen die Teilnehmer diesem Katalog eine außerordentliche Bedeutung zu:

- Er stellt das Ergebnis einer engagierten Diskussion und Analyse der eingangs beschriebenen Problematik dar und legt eine differenzierte Beschreibung dazu vor.
- Er wurde in einem breiten Konsens von beiden beteiligten Seiten – Schule und Hochschule – erstellt.
- Er spiegelt das Interesse von Schule und Hochschule wider, die Problematik gemeinsam zu lösen.

Der Katalog macht deutlich, dass die Anforderungen an der Schnittstelle Schule-Hochschule in großen Bereichen aufeinander abgestimmt sind. Die dort auftretenden Schwierigkeiten der StudienanfängerInnen können durch Vertiefungs- und Übungsangebote weitgehend aufgefangen werden. Die Analyse zeigt aber auch eine systematische Diskrepanz, die es aufzulösen gilt.

Die Teilnehmer der Tagungen haben die Verantwortung der einzelnen Beteiligten an dieser Schnittstelle klar benannt:

- Die **Schule** muss den SchülerInnen ermöglichen, die im Anforderungskatalog nicht besonders gekennzeichneten Fertigkeiten und Kompetenzen zu erwerben. SchülerInnen, die beabsichtigen, ein WiMINT-Fach zu studieren, sollen über die bestehenden Probleme informiert werden. Im Rahmen ihrer Möglichkeiten bietet die Schule Hilfestellungen an.
- Die **Hochschule** akzeptiert diesen Anforderungskatalog – und nicht mehr – als Basis für StudienanfängerInnen. Im Rahmen ihrer Möglichkeiten bietet die Hochschule Hilfestellungen an.
- Die **StudienanfängerInnen** müssen, wenn sie ein WiMINT-Fach studieren, dafür sorgen, dass sie zu Beginn des Studiums die Anforderungen des Katalogs erfüllen. Dafür muss ihnen ein adäquater Rahmen geboten werden.
- Die **Politik** muss auf die beschriebene systematische Diskrepanz reagieren. Solange diese Diskrepanz besteht, sind flächendeckend Maßnahmen erforderlich, um die beschriebenen Schwierigkeiten möglichst rasch zu beseitigen. Um die Qualität unseres Bildungssystems zu sichern, müssen Rahmenbedingungen für Schule, Hochschule und StudienanfängerInnen so verbessert werden, dass diese ihrer oben beschriebenen Verantwortung gerecht werden können.

1 Allgemeine Mathematische Kompetenzen

Das Studium von WiMINT-Fächern erfordert zusätzlich zur allgemeinen Studierfähigkeit die Bereitschaft, auch komplexe Fragestellungen dieser Gebiete ohne Scheu anzugehen, daran hartnäckig und sorgfältig zu arbeiten und dabei die strenge Exaktheit der Fachsprache und Fachsymbolik zu akzeptieren. Die Nutzung elektronischer Hilfsmittel – insbesondere mathematischer Software – wird immer selbstverständlicher. Ihr sinnvoller Einsatz erfordert Kontrolle durch Plausibilitätsbetrachtungen, die eine besondere Vertrautheit im Umgang mit Zahlen und Variablen (vergleiche Kapitel 2) voraussetzen. Diese muss durch nachhaltiges Üben wachgehalten werden.

1.1 Probleme lösen

Sachverhalte oder Probleme in den WiMINT-Fächern können in unterschiedlichen Darstellungsarten vorliegen, zum Beispiel als Text, Grafik, Tabelle, Bild, Modell usw. Manchmal können Probleme auch offen formuliert sein. Die StudienanfängerInnen können

- dazu nützliche Fragen stellen (1, 58);
- die gegebenen Sachverhalte mathematisch modellieren (2, 3, 26);
- Strategien des Problemlösens anwenden (4);
- Hilfsmittel (Formelsammlung, elektronische Hilfsmittel) angemessen nutzen (17, 48).

1.2 Systematisch vorgehen

Die StudienanfängerInnen können systematisch arbeiten. Sie

- zerlegen komplexe Sachverhalte in einfachere Probleme;
- können Fallunterscheidungen vornehmen (5);
- arbeiten sorgfältig und gewissenhaft (67).

1.3 Plausibilitätsüberlegungen anstellen

Zur Kontrolle ihrer Arbeit können die StudienanfängerInnen

- Fehler identifizieren und erklären (6);
- Größenordnungen abschätzen (7, 12, 13);
- mittels Überschlagsrechnung ihre Ergebnisse kontrollieren (8).

1.4 Mathematisch kommunizieren und argumentieren

Für das Begreifen der Fragestellungen und das Weitergeben mathematischer Ergebnisse ist es unerlässlich, dass die StudienanfängerInnen

- Fachsprache und Fachsymbolik verstehen und verwenden (9, 10, 11);
- mathematische Sachverhalte mit Worten erklären (14, 15, 16);
- mathematische Behauptungen mithilfe von unterschiedlichen Darstellungsformen, z.B. Worten, Skizzen, Tabellen, Berechnungen begründen oder widerlegen;
- Zusammenhänge (mit und ohne Hilfsmittel) visualisieren (3, 17, 18);
- eigene sowie fremde Lösungswege nachvollziehbar präsentieren können (19).

2 Elementare Algebra

Wir setzen voraus, dass die StudienanfängerInnen die Aufgaben zu den folgenden Kompetenzen – abgesehen von der Bestimmung eines numerischen Endergebnisses – ohne CAS-Rechner und ohne Taschenrechner (TR/GTR) lösen können.

2.1 Grundrechenarten

Die StudienanfängerInnen verfügen über grundlegende Vorstellungen von Zahlen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). Sie

- können überschlägig mit Zahlen rechnen (20);
- können die Regeln zur Kommaverschiebung anwenden (21);
- beherrschen die Vorzeichen- und Klammerregeln, können ausmultiplizieren und ausklammern (22);
- können Terme zielgerichtet umformen mithilfe von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz (23);
- (**) beherrschen die binomischen Formeln mit beliebigen Variablen (24, 25);
- verstehen Proportionalitäten und können mit dem Dreisatz rechnen (26, 27, 55).

2.2 Bruchrechnen

Die StudienanfängerInnen können die Regeln der Bruchrechnung zielgerichtet anwenden. Sie können

- erweitern und kürzen (28, 29);
- Brüche multiplizieren, dividieren, addieren und subtrahieren (30, 31).

2.3 Prozentrechnung

Die StudienanfängerInnen können mit Prozentangaben gut und sicher umgehen. Sie beherrschen die Zins- und Zinseszinsrechnung (8, 32, 33, 34).

2.4 Potenzen und Wurzeln

Die StudienanfängerInnen können die Potenz- und Wurzelgesetze zielgerichtet anwenden. Sie wissen, wie Wurzeln auf Potenzen zurückgeführt werden und können damit rechnen (30, 35, 36, 42).

2.5 Gleichungen mit einer Unbekannten

Die StudienanfängerInnen können Gleichungen mithilfe von Äquivalenzumformungen und Termumformungen lösen. Sie können

- lineare und quadratische Gleichungen lösen (37, 38, 39, 41(d));
- einfache Exponentialgleichungen lösen (64);
- Gleichungen durch Faktorisieren lösen (41(a));
- (**) Wurzelgleichungen lösen und kennen dabei den Unterschied zwischen einer Äquivalenzumformung und einer Implikation (40, 42);
- (*) einfache Betragsgleichungen lösen und dabei den Betrag als Abstand auf dem Zahlenstrahl interpretieren (5(a));
- (*) Gleichungen durch Substitutionen lösen (biquadratisch, exponential, . . .) (41(b), 41(c)).

2.6 (*) Ungleichungen mit einer Unbekannten

Die StudienanfängerInnen können die Lösungsmengen von einfachen Ungleichungen bestimmen. Sie können

- lineare Ungleichungen lösen (43);
- quadratische Ungleichungen grafisch lösen (44);
- einfache Betragsungleichungen lösen und dabei den Betrag als Abstand auf dem Zahlenstrahl interpretieren (45, 46);
- (**) Ungleichungen mit Brüchen lösen (47).

3 Elementare Geometrie/Trigonometrie

Die StudienanfängerInnen können

- elementargeometrische Objekte anhand ihrer definierenden Eigenschaften identifizieren (48, 49);

- Strecken und Winkel mithilfe grundlegender Sätze der Elementargeometrie (Stufen- und Wechselwinkel an Parallelen, Strahlensätze, Kongruenz von Dreiecken, Winkelsummen, Satz des Pythagoras) berechnen (50, 51);

- Umfang und Flächeninhalt von Kreisen und einfachen Vielecken berechnen (52, 53, 54);

- Oberfläche und Volumen einfacher Körper berechnen (Prisma, Zylinder, Pyramide, Kegel, Kugel) (52, 53, 54).

- Gradmaß und Bogenmaß unterscheiden und ineinander umrechnen (55, 56);

- Sinus, Kosinus und Tangens als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken interpretieren und damit fehlende Größen bestimmen (57, 58, 59);

- Sinus und Kosinus als Koordinaten der Punkte des Einheitskreises identifizieren (60, 61);

4 Analysis

4.1 Funktionen

Die StudienanfängerInnen verfügen über ein Verständnis für Funktionen, d. h. sie

- kennen wichtige Eigenschaften (Definitionsmenge, Wertemenge, Symmetrie, Monotonie, Nullstellen, Extrem- und Wendestellen) folgender elementarer Funktionen:
  Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen), insbesondere lineare und quadratische Funktionen
  Potenzfunktionen, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$,
  Exponentialfunktionen (auch $x \mapsto e^x$),
  (*) $x \mapsto \ln(x)$,
  $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$,
  (*) $x \mapsto \tan(x)$ (62, 63, 64, 65);

- können den qualitativen Verlauf der Graphen dieser elementaren Funktionen beschreiben sowie Funktionsterme von elementaren Funktionen ihren Schaubildern zuordnen und umgekehrt;

- können elementare Funktionen transformieren und die entsprechende Abbildung (Verschiebung, Spiegelung an Koordinatenachsen, Streckung/Stauchung in x- und y-Richtung) durchführen (65, 66);

- können durch Addition, Multiplikation und (*)Verkettung von Funktionen neue Funktionen erzeugen (67);

- können Tabellen und Graphen auch für nichtelementare Funktionen (in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel) erstellen (68);

- können aus gegebenen Bedingungen einen Funktionsterm mit vorgegebenem Typ bestimmen (69).

4.2 Differenzialrechnung

Die StudienanfängerInnen verfügen über ein grundlegendes Verständnis des Ableitungsbegriffs und beherrschen die zentralen Techniken der Differenzialrechnung, d. h. sie

- haben ein propädeutisches Wissen über Grenzwerte (70);
- verstehen die Ableitung an einer Stelle als momentane Änderungsrate und als Tangentensteigung (71);
- können den Zusammenhang zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion erläutern (72);
- können aus dem Graphen einer Funktion den qualitativen Verlauf des Graphen der Ableitungsfunktion bestimmen und umgekehrt (73);
- kennen die Ableitungsfunktionen elementarer Funktionen (74);
- kennen die Summen-, Faktor-, (*)Produkt- und (*)Kettenregel und können diese sowie einfache Kombinationen davon anwenden (75);
- können die Differenzialrechnung zur Bestimmung von Eigenschaften von Funktionen (insbesondere Monotonieverhalten und Extremstellen) nutzen (72, 76, 77);
- können mithilfe der Differenzialrechnung Optimierungsprobleme lösen (78).

4.3 Integralrechnung

Die StudienanfängerInnen verfügen über ein grundlegendes Verständnis des Integralbegriffs und beherrschen zentrale Techniken der Integralrechnung, d. h. sie

- verstehen das bestimmte Integral als Grenzwert von Summen (79);
- können das bestimmte Integral als Rekonstruktion eines Bestandes aus der Änderungsrate und als orientierten Flächeninhalt interpretieren (80);
- kennen den Begriff der Stammfunktion und kennen die Stammfunktionen der grundlegenden Funktionen $x \mapsto x^k$ $(k \in \mathbb{Z})$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$ (81, 82(a));
- können die Faktor- und Summenregel zur Berechnung von Stammfunktionen anwenden (82);
- können bestimmte Integrale mithilfe von Stammfunktionen berechnen (83);
- können die Integralrechnung zur Berechnung der Fläche zwischen zwei Kurven anwenden (84).

5 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

5.1 Orientierung im zweidimensionalen Koordinatensystem

Die StudienanfängerInnen finden sich sicher im zweidimensionalen Koordinatensystem zurecht. Insbesondere können sie

- eine analytisch gegebene Gerade zeichnen (85);
- Koordinatenbereiche skizzieren (86);
- (**) einen durch eine Gleichung gegebenen Kreis zeichnen (87);

5.2 Lineare Gleichungssysteme

Die StudienanfängerInnen können

- (*) lineare Gleichungssysteme mit bis zu 3 Gleichungen und 3 Unbekannten ohne Hilfsmittel lösen. Offensichtliche Lösungen werden ohne Gauß-Elimination erkannt (88);
- (*) die Lösbarkeit derartiger Gleichungssysteme – in einfachen Fällen auch in Abhängigkeit von Parametern – diskutieren (88, 89);
- ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten geometrisch im zweidimensionalen Koordinatensystem interpretieren (90).

5.3 (**)[1] Grundlagen der anschaulichen Vektorgeometrie

Die StudienanfängerInnen können mit Vektoren in Ebene und Raum umgehen. Insbesondere

- können sie Vektoren als Pfeilklassen interpretieren (91);
- kennen sie die Komponentendarstellung von Vektoren (92, 93);
- können sie Punktmengen im Anschauungsraum mithilfe von Vektoren untersuchen (92, 93);
- beherrschen sie die Addition und S-Multiplikation von Vektoren (93);
- können sie mithilfe von Vektoren Geraden und Ebenen im Raum darstellen (94, 95, 96).

6 Stochastik

Die Hochschulen setzen keine Vorkenntnisse der Stochastik zu Studienbeginn voraus, begrüßen aber im Sinne der Allgemeinbildung, dass statistische sowie wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen in der Schule vermittelt werden.

[1] Pflichtthema in den technischen Gymnasien, ansonsten Wahlpflichtthema

Anhang – Beispielaufgaben

Die aufgeführten Beispielaufgaben verdeutlichen das Anforderungsniveau der oben genannten Kenntnisse und Fertigkeiten.

1. Im Jahr 2006 hatte Deutschland 41,27 Millionen weibliche und 40,27 Millionen männliche Einwohner. In Baden-Württemberg lebten 10,75 Millionen Menschen, davon waren 50,88 % weiblich. Die Anzahl der Ausländer betrug in Deutschland 7,29 Millionen, in Baden-Württemberg 1,27 Millionen und in Hamburg 250.000.

   (a) Formulieren Sie Fragen, die mithilfe dieser Daten beantwortet werden können.

   (b) Formulieren Sie eine Frage, für deren Beantwortung mindestens eine weitere Information notwendig ist.

2. Die Geschwindigkeit eines Autos beträgt 20 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zu Beginn der Beobachtung. Innerhalb der nächsten 10 s nimmt die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand ab. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.

3. Modellieren Sie den Tagesgang der Temperatur durch eine Sinusfunktion. Bestimmen Sie die Parameter aus den folgenden Angaben: Um 16:00 Uhr ist die Temperatur mit 25 °C am höchsten. Nachts um 4:00 Uhr ist es mit 3 °C am kältesten.

4. Ein Schwimmbecken mit dem Volumen 720 m^3 kann durch drei Leitungen mit Wasser gefüllt werden. Eine Messung ergab, dass die Füllung des Beckens mit den beiden ersten Leitungen zusammen 45 Minuten dauert. Die Füllung mit der ersten und der dritten Leitung zusammen dauert eine Stunde, mit der zweiten und der dritten Leitung zusammen dauert es 1,5 Stunden.

   (a) Wie groß ist die Wassermenge, die durch jede der drei Leitungen pro Minute ins Becken gepumpt werden kann?

   (b) Wie lange benötigt man bei der Benutzung aller drei Leitungen, um das Becken zu füllen?

5. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Gleichungen und Ungleichungen erfüllt?

   (a) (*) $|2x - 3| = 8$

   (b) (**) $|3x - 6| \leq x + 2$

   (c) (**) $\dfrac{x+1}{x-1} \leq 2$

6. Sei f eine Polynomfunktion. Welche Aussagen sind falsch? Erläutern Sie anhand eines Beispiels.

   - Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, dann ist x_0 eine Extremstelle von f.
   - Wenn x_0 eine Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.
   - Ist $f''(x_0) > 0$, so ist der Punkt $P(x_0|f(x_0))$ ein Tiefpunkt des Graphen von f.

7. Im Jahr 2013 wurde in Baden-Württemberg auf einer Fläche von 11.333 ha Wein angebaut. Der durchschnittliche Ertrag pro Ar betrug 92 Liter.
   Wie lang wäre die Flaschenreihe ungefähr, wenn man die gesamte Jahresproduktion in Dreiviertelliterflaschen abfüllen würde und diese Flaschen der Länge nach hintereinander legen würde?

8. Zu Beginn jedes Jahres werden auf ein Sparbuch 1000 € eingezahlt.
   (a) Das Guthaben wird während der gesamten Zeit mit einem Zinssatz von 5 % pro Jahr verzinst, und die Zinsen werden jährlich dem Guthaben zugeschlagen. Schätzen Sie, welcher der folgenden Werte dem Guthaben am Ende des 5. Jahres am nächsten kommt. Begründen Sie Ihre Wahl, ohne das genaue Ergebnis zu berechnen.
   1250 € 5000 € 6250 € 5800 € 5250 €
   (b) Berechnen Sie das Ergebnis genau.

9. Erläutern Sie den Unterschied zwischen der Menge $\{2;5\}$ und dem Intervall $[2;5]$. Ist ein Intervall auch eine Menge?
   Entscheiden Sie für alle $x \in \{1;2;3;4;5;6\}$, ob $x \in \{2;5\}$ beziehungsweise $x \in [2;5]$ gilt.

10. (a) Formulieren Sie in Worten:
    - $x \in \{0;1;2;3\}$
    - $x \in [0;1{,}5]$
    - $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;2\}$
    - $x \in \mathbb{R} \setminus [-1;1]$

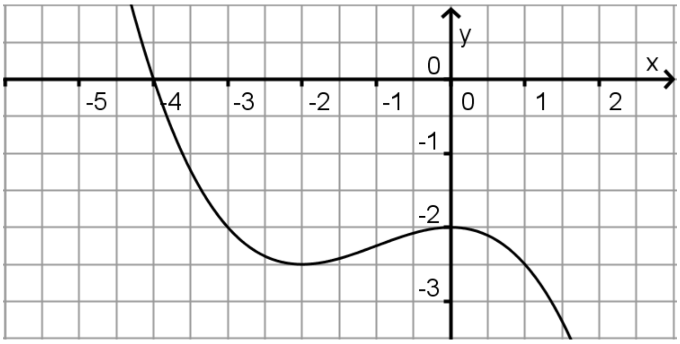
    (b) Notieren Sie in Mengenschreibweise:
    - Die Zahl s ist größer oder gleich 5 und kleiner oder gleich 7.
    - Die Zahl 5 gehört nicht zu den einstelligen geraden Zahlen.
    - Die Funktion f hat 2 als einzige Definitionslücke.
    - Die Definitionsmenge D der Funktion g besteht aus allen reellen Zahlen, die größer als 1 sind.

11. Was ist an der folgenden Darstellung falsch?
    $x^2 - 4 \Rightarrow (x-2)(x+2)$

12. Ordnen Sie (ohne Verwendung eines Taschenrechners) die angegebenen Zahlen der Größe nach, beginnend mit der kleinsten:
    0; $(0,5)^{-2{,}4}$; 1; 4; $4^{-3{,}8}$; 0,25; $2^{-3{,}3}$; $(0{,}5)^{2{,}4}$; 8; 2^{-3}

13. Wenn man die Zahlen $a = (10^{10})^{10}$ und $b = 10^{(10^{10})}$ ausschreibt, beginnen sie mit einer 1, danach kommen viele Nullen. Wie viele Stellen haben die Zahlen a bzw. b?
    Ein Drucker gibt 150 Ziffern pro Sekunde aus. Wie lange braucht er, um die ausgeschriebenen Zahlen a bzw. b zu drucken?
    Schätzen Sie zuerst das Ergebnis und berechnen Sie es anschließend!

14. Die Abbildung zeigt für $-6 \leq x \leq 3$ das Schaubild der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h.



Entscheiden und begründen Sie, ob gilt:

- $x_1 = 0$ ist eine Wendestelle von h.
- $h''(-2) = 1$
- Die Funktion h ist auf dem Intervall $[-3; 1]$ streng monoton fallend.

Skizzieren Sie das Schaubild von h''.

15. Beschreiben Sie den Term $a \cdot \sqrt{b \cdot c^2 + d}$ in Worten.

16. (*) Welche Ableitungsregeln benötigen Sie zur Ableitung der Funktion f gegeben durch $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$? Berechnen Sie die Ableitung.

17. Vor 200 Jahren wurden in Entenhausen 2 Dagos – das entspricht 0,3 € – bei einer Bank angelegt und jährlich mit 8 % fest verzinst.

    (a) Wie groß wäre das Guthaben heute, wenn die Zinsen stets wieder mitverzinst würden? Stellen Sie eine Wertetabelle auf und den Verlauf des Guthabens in Abhängigkeit von den Jahren dar.

    (b) Nach wie vielen Jahren wären die 2 Dagos auf 200 Dagos angewachsen?

    (c) Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit nach 200 Jahren das Guthaben umgerechnet 2.000.000 € beträgt?

18. Betrachten Sie die beiden LGS:

$$\left\{\begin{matrix} 15x + 3y = 30 \\ 5x + 0,96y = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{sowie} \quad \left\{\begin{matrix} 15x + 3y = 30 \\ 5x + 0,98y = 0 \end{matrix}\right\}$$

    (a) Lösen Sie beide LGS.

    (b) Vergleichen und interpretieren Sie die beiden Ergebnisse.

    (c) Skizzieren Sie die 3 beteiligten Geraden.

    (d) Bei welcher Variation des Koeffizienten vor y in der zweiten Gleichung gibt es gar keine Lösung?

19. Jan formuliert die Lösung einer Aufgabe in "Kurzschreibweise":

    (a) Ergänzen Sie die fehlende Rechnung.

    (b) Welches geometrische Problem hatte Jan zu lösen?

    (c) Interpretieren Sie das von Jan errechnete Ergebnis geometrisch.

$$f(x) = 3x^2 - 12x - 5$$
$$g(x) = -6x - 8$$
$$f(x) = g(x):$$
$$3x^2 - 12x - 5 = -6x - 8$$
$$\Leftrightarrow \ldots$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

20. (a) Begründen Sie, dass $\left(\frac{99}{41}\right)^2$ zwischen 4 und 9 liegt.

    (b) Zwischen welchen aufeinander folgenden ganzen Zahlen liegt $\sqrt{150}$?

21. Vereinfachen Sie:

    (a) $0{,}005 \cdot 100$

    (b) $\frac{78653}{10^4}$

22. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

    (a) $-(-(b + c - (5 - (+3))))$

    (b) $\frac{4 \cdot a \cdot b + 6 \cdot a}{2 \cdot (b + 1) + 1}$

23. Vereinfachen Sie den Ausdruck $3ab - (b(a - 2) + 4b)$.

24. (**) Multiplizieren Sie $\left(\frac{b}{3x} - \frac{x^2}{b^3}\right)^2$ mithilfe der binomischen Formeln aus.

25. (**) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\frac{4 - t^2}{4 - 4t + t^2}$.

26. Fließt ein Gleichstrom durch eine verdünnte Kupfersulfatlösung, so entsteht am negativen Pol metallisches Kupfer. Die abgeschiedene Kupfermenge ist sowohl zur Dauer des Stromflusses, als auch zur Stromstärke direkt proportional. Bei einer Stromstärke von 0,4 A werden in 15 Minuten 0,12 g Kupfer abgeschieden. Wie lange dauert es, bis 0,24 g Kupfer bei einer Stromstärke von 1 A abgeschieden werden?

27. Eine Kamera hat eine Auflösung von 6 Megapixel (der Einfachheit halber 6 Millionen Pixel) und produziert Bilder im Kleinbildformat 3 : 2. Wie groß ist ein quadratisches Pixel auf einem Ausdruck im Format (60 cm) × (40 cm)?

28. (a) Für den Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter Widerstände R_1, R_2 gilt $\frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}$. Lösen Sie die Gleichung nach R auf.

    (b) Bringen Sie $\frac{a}{x - 2} + \frac{b}{(x - 2)^2} + \frac{c}{x - 3}$ auf den Hauptnenner.

29. Fassen Sie den Ausdruck $\dfrac{1}{x+1} + x - 1$ zu einem Bruch zusammen.

30. Vereinfachen Sie $\left(\dfrac{a^2 \cdot b}{c \cdot d^3}\right)^3 : \left(\dfrac{a \cdot b^2}{c^2 \cdot d^2}\right)^4$.

31. Formen Sie den Doppelbruch $\dfrac{\frac{1}{\omega \cdot C}}{\frac{1}{\omega \cdot C} + \mathrm{R}}$ so um, dass das Ergebnis nur einen Bruchstrich enthält.

32. Der Aktienkurs der Firma XXL fällt im Jahr 2011 um 10 % und wächst in den Jahren 2012 und 2013 um je 5 %. Wo steht der Kurs Ende 2013 im Vergleich zum Beginn von 2011?

33. Ein Kreissektor füllt 30 % der Fläche eines Kreises aus. Welchem Mittelpunktswinkel entspricht das?

34. Wie verändert sich der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn eine der Katheten um 20 % verkürzt und die andere um 20 % verlängert wird?

35. Fassen Sie den Ausdruck $x^2 x^4 + \dfrac{x^8}{x^2} + \left(x^2\right)^3 + x^0$ zusammen.

36. Vereinfachen Sie $\dfrac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$.

37. Bestimmen Sie die Nullstellen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3x - 4$.

38. Lösen Sie die Gleichung $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ nach x auf.

39. Welche der Aussagen sind in Bezug auf die folgende Gleichung richtig?

$$(x-2)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2-9\right) = 0$$

Begründen Sie Ihre Entscheidung!

(a) Die Nullstellen sind hier schwierig zu bestimmen.
(b) $x = 1$ und $x = 2$ sind Lösungen.
(c) $x = 2$ und $x = 3$ sind Lösungen.
(d) $x = 1{,}4142$ und $x = 2$ sind Lösungen.
(e) Es gibt genau vier Lösungen.

40. (**) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{8-2x} = 1 + \sqrt{5-x}$?

41. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

    (a) $2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$
    (b) (*) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
    (c) (*) $3 + 2e^{-2x} - 5e^{-x} = 0$
    (d) (**) $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{6}{x^2-9}$

42. Lösen Sie die folgenden Ausdrücke nach x auf:

    (a) $\sqrt{x} \cdot u = \dfrac{v}{x^2}$
    (b) $x^{\frac{3}{4}} \cdot t^2 = x^{-4} \cdot y$

43. Für welche x gilt $3x - 7 > 2 + 5x$?

44. (*) Für welche x gilt $x^2 - 2x < 3$?

45. (**) Lösen Sie:

    (a) $|x - 3| < 2$
    (b) $|2x - 3| > 5$

46. (*) Der Staudruck p_{St} bei einer Strömung ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit, d. h. $p_{St}(v) = kv^2$. In welchem Geschwindigkeitsbereich ist er kleiner als ein vorgegebener Wert $p_0 > 0$?

47. (**) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist

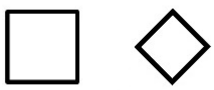
    (a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{9}$?
    (b) $\dfrac{1}{1-x} > 3$?

48. Von einem Viereck ist bekannt, dass es sowohl eine Raute (Rhombus) als auch ein Rechteck ist. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

    (a) Das Viereck ist ein Parallelogramm.
    (b) Das Viereck ist ein Drachen.
    (c) Das Viereck ist ein Quadrat.

    Schauen Sie fehlende Begriffe in einer Formelsammlung nach.

49. (a) Wie viele Quadrate und wie viele Rauten sind hier dargestellt?

    (b) Begründen Sie, dass beide Figuren Quadrate sind.
    (c) Zeichnen Sie eine Raute, die kein Quadrat ist.

50. Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie die gleichen Innenwinkel besitzen.
In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien nun D der Höhenfußpunkt von C, E der Höhenfußpunkt von B und S der Schnittpunkt der beiden Höhen DC und EB.

    (a) Skizzieren Sie den dargestellten Sachverhalt.
    (b) Begründen Sie, dass die Dreiecke SCE, ADC, BEA und SDB ähnlich sind.

51. Welche der folgenden Aussagen über Winkel sind stets korrekt?

    (a) Die Summe zweier Nebenwinkel ist 180°.
    (b) Stufenwinkel sind gleich groß.
    (c) Scheitelwinkel sind gleich groß.
    (d) Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.

52. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen eines Zylinders mit dem Durchmesser 4 cm und der Höhe 8 cm.

53. Gegeben sei eine quadratische Pyramide mit dem Volumen 60 cm^3 und der Höhe 6 cm. Berechnen Sie die Länge der Grundseite und den Inhalt der Grundfläche.

54. Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 10 cm wird um eine der Symmetrieachsen gedreht. Welches Volumen und welche Oberfläche hat der erzeugte Drehkörper?

55. (a) Geben Sie im Bogenmaß an: $135°; 19,7°$.
    (b) Geben Sie die folgenden Bogenmaße im Gradmaß an: 0,6π; 2,7.
    (c) Ergänzen Sie die folgende Tabelle.

Bogenmaß	π		$\frac{\pi}{4}$	- $\frac{\pi}{3}$			1
Gradmaß		180°			270°	18°	

56. Die folgenden Werte wurden mit dem Taschenrechner berechnet und gerundet.
$\cos(\frac{\pi}{4}) = 0,7071$ $\quad \cos(\pi) = 0,998$ $\quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 0{,}027$ $\quad \sin(270°) = -1$
$\sin(30°) = -0,988$

    (a) Überprüfen Sie ohne Taschenrechner, ob die Ergebnisse plausibel sind.
    (b) Welcher Fehler wurde bei der Berechnung teilweise gemacht?

57. Eine 4 m lange Leiter wird in einer Höhe von 3 m an eine Hauswand gelehnt. Welchen Winkel schließt die Leiter mit dem Boden ein?

58. Von der auf 1800 m Höhe gelegenen Bergstation einer Seilbahn erscheint die auf 1100 m Höhe gelegene Talstation unter einem Blickwinkel von 42° gegenüber der Waagerechten.
Überlegen Sie sich, welche Fragestellungen interessant sein könnten, und berechnen Sie entsprechende Längen mithilfe der Trigonometrie.

59. Das zylinderförmige Schaufelrad eines Dampfers hat einen Durchmesser von 5,90 m.

    (a) Bei entsprechender Beladung des Dampfers taucht das Rad 1,20 m tief in das Wasser ein. Wie viel Prozent des Umfangs der kreisförmigen Querschnittsfläche des Schaufelrads sind dann unter Wasser?

    (b) Berechnen Sie den Tiefgang unter der Voraussetzung, dass 40 % des Umfangs unter Wasser sind.

60. Der Sinus von 15° ist ungefähr 0,2588. Berechnen Sie daraus ohne Taschenrechner näherungsweise die Werte $\sin(165°)$, $\sin(-15°)$ und $\cos(105°)$.

61. Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem einen Einheitskreis mit Mittelpunkt $(0|0)$.

    (a) Zeichnen Sie einen Punkt P auf dem Einheitskreis ein, so dass für den zu P gehörenden Winkel α zur x-Achse $\sin(\alpha) = 0{,}6$ ist.
    Begründen Sie, dass es für $0° \leq \alpha \leq 180°$ einen weiteren Punkt mit dieser Eigenschaft gibt.

    (b) Entnehmen Sie Ihrer Zeichnung einen Näherungswert für $\cos(\alpha)$ und berechnen Sie diesen Wert.

    (c) Begründen Sie mithilfe des Einheitskreises, dass es für $0° \leq \alpha \leq 180°$ nur einen Punkt P gibt, für den gilt: $\cos(\alpha) = 0{,}8$.

    (d) Erläutern Sie, dass für alle Winkel α gilt: $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$.

62. Welche der folgenden Aussagen sind falsch? Geben Sie für die falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an.

    (a) Eine Polynomfunktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

    (b) Eine Polynomfunktion geraden Grades hat keine Nullstellen.

    (c) Quadratische Funktionen haben keine Wendestellen.

    (d) Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ hat die Menge aller reellen Zahlen als Definitionsmenge.

    (e) Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ hat die Menge aller reellen Zahlen als Wertemenge.

    (f) Alle Funktionen f mit $f(x) = a^x$ (mit $a > 0$) sind streng monoton wachsend.

    (g) Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

    (h) (*) Die Definitionsmenge der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+5}$ ist die Menge aller reellen Zahlen, die größer als 5 sind.

    (i) Die Maximalstellen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ sind Wendestellen der Funktion g mit $g(x) = \cos(x)$.

63. Gesucht ist die ganzrationale Funktion niedrigsten Grades mit den drei Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, deren Schaubild durch den Punkt $(0|3)$ geht.

64. Das Gesetz des radioaktiven Zerfalls lautet $n(t) = n_0 \cdot e^{-kt}$. Die Zahl $n(t)$ gibt die Anzahl der Atome nach t Zeiteinheiten wieder, $n_0 = n(0)$ ist der Bestand an Atomen zur Zeit $t = 0$. Die Zahl $k > 0$ ist die Zerfallskonstante mit der Einheit 1/Zeiteinheit.

   (a) Ermitteln Sie die Halbwertszeit t_h, nach der die Zahl der anfangs vorhandenen Atome durch Zerfall auf die Hälfte abgenommen hat.
   Nach welcher Zeit, ausgedrückt in Halbwertszeiten, sind von dem radioaktiven Stoff nur noch 25 %, 5 % beziehungsweise 1 % vorhanden?

   (b) Die Tangente an die Kurve von n im Punkt $(0|n_0)$ schneidet die t-Achse im Punkt $(T|0)$. Bestimmen Sie T.
   Welcher Anteil des Anfangswertes n_0 ist zur Zeit T noch vorhanden?

65. Bestimmen Sie die Periode p der Funktion f mit $f(x) = -3\cos(2x)$ und geben Sie – ohne Hilfsmittel aus der Differenzialrechnung – sämtliche Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte auf dem Intervall $0 \leq x < p$ an.

66. Skizzieren Sie die Graphen von:

   (a) $y = \sin x$

   (b) $y = 2\sin x$

   (c) $y = 2 + \sin x$

   (d) $y = \sin(2x)$

   (e) $y = \sin(x + 2)$

   (f) $y = 2\sin(x + 2) + 2$

   (g) $y = -\sin x$

   (h) $y = \sin(-x)$

   (i) $y = -\sin(-x)$

67. (*) Gegeben seien die Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1$ und $f_3(x) = \sqrt{x}$; $x \in \mathbb{R}^+$.
   Bestimmen Sie die Funktionen g, h und k mit

   (a) $g(x) = f_3(f_1(x) + f_2(x))$;

   (b) $h(x) = f_3(f_1(x)) + f_2(x)$;

   (c) $k(x) = f_1(f_2(x) + f_3(x))$.

   Vereinfachen Sie dabei die Funktionsterme so weit wie möglich.

68. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g:

   (a) $f(x) = |\sin(x)|$.

   (b) $g(x) = 2 \cdot e^{\sin(x)}$.

69. (a) Bestimmen Sie die Funktion f mit $f(x) = a^x$, $a > 0$, deren Graph durch den Punkt $P(2|49)$ geht.

(b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse, schneidet die y-Achse 2 Einheiten oberhalb des Ursprungs und hat den Hochpunkt $H(1|3)$.
Bestimmen Sie die Funktion f.

70. (**) Wie verhält sich die Funktion f mit

(a) $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$ für $x \to +\infty$;

(b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ für $x \to +\infty$;

(c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$ für $x \to +\infty$;

(d) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$ für $x \to -\infty$;

(e) $f(n) = (-0,5)^n$ für $n \to +\infty$ $(n \in \mathbb{N})$;

(f) $f(n) = (-1)^n$ für $n \to +\infty$ $(n \in \mathbb{N})$;

(g) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x \to -1$;

(h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ für $x \to -1$?

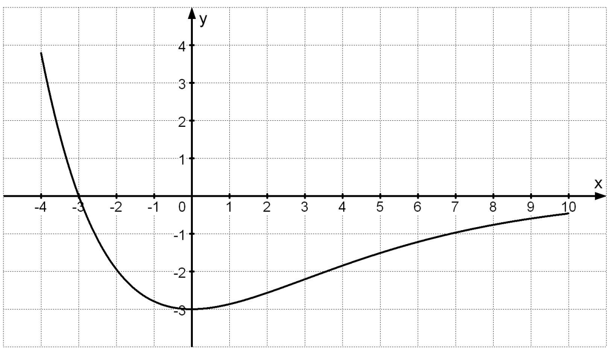
71. Sind die folgenden Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar? Erläutern Sie Ihre Entscheidung mithilfe einer Skizze.

(a) Besitzt die Funktion f an der Stelle 2 den Funktionswert 1, so gilt $f'(2) = 1$.

(b) Gilt $f'(2) = 1$, so hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1|f(1))$ die Steigung 2.

(c) Die momentane Änderungsrate der Funktion f mit $f(x) = -0,5x^2 + 2$ an der Stelle -3 ist positiv.

72. Die Abbildung zeigt für $-4 \leq x \leq 10$ den Graphen der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h.



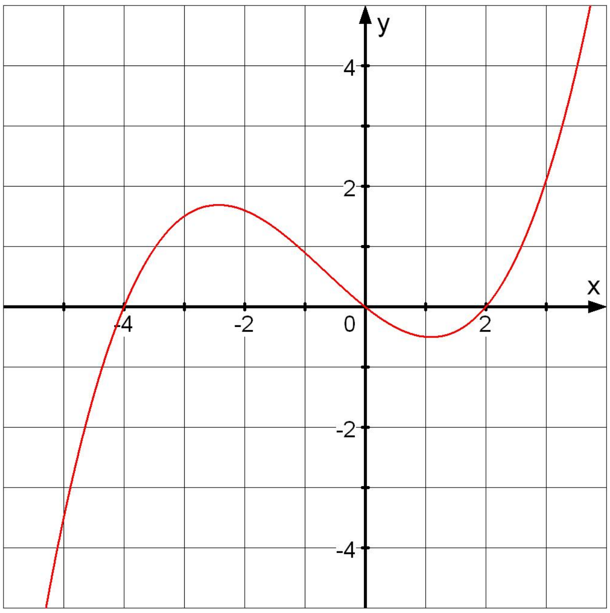
Entscheiden und begründen Sie, ob gilt:

(a) Die Funktion h ist auf dem Intervall $-3 < x < 10$ streng monoton fallend.

(b) Die Funktion h hat an der Stelle -3 ein Minimum.

(c) $x = 0$ ist eine Wendestelle von h.

73. Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



74. Geben Sie die Ableitungsfunktion an.

(a) $f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{Z}$

(b) $f(x) = e^x$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$

(d) $f(x) = \sin(x)$

(e) $f(x) = \cos(x)$

(f) (*) $f(x) = \ln(x)$

75. Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen.

(a) $f(x) = x^3 - 6x + 1$

(b) $f(x) = e^5$

(c) (*) $f(x) = (1 - x^2)^9$

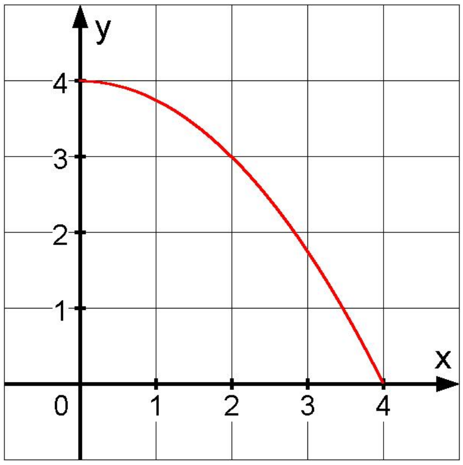
(d) (*) $f(x) = x \cdot e^{2x}$

(e) (*) $f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \sin(x)$

76. Berechnen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Schaubildes der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x + 1$. In welchem Bereich ist die Funktion f streng monoton fallend?

77. (*) Gegeben sei die Funktion f durch $f(x) = x \cdot e^{-0,5x}$.
Bestimmen Sie den Extrempunkt von f und weisen Sie rechnerisch nach, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.

78. Zwei Seiten eines Rechtecks liegen auf den positiven Koordinatenachsen, ein Eckpunkt auf dem abgebildeten Stück der Parabel mit der Gleichung $y = -0,25x^2 + 4$.
Wie groß müssen die Seitenlängen dieses Rechtecks sein, damit sein Umfang maximal wird?
Wie groß ist dann der Umfang?



79. (a) Berechnen Sie einen Näherungswert für das Integral $\int_0^1 x^2 dx$, indem Sie das Intervall $[0, 1]$ in fünf gleiche Teile teilen und damit die Untersumme berechnen.
    (b) Wie kann man den Näherungswert verbessern?
    (c) Wie erhält man den exakten Wert des Integrals?

80. Bei einem Wasserbecken, das zu Beginn 2000 m^3 Wasser enthält, fließt Wasser ein und aus. Die Wasserzuflussrate kann für $t \in [0; 70]$ durch die Funktion f beschrieben werden:
$f(t) = -t^2 + 40t + 225$ (t in Tagen seit Beginn, $f(t)$ in m^3/Tag).

Bestimmen Sie die Funktion, die die vorhandene Wassermenge zu jedem Zeitpunkt angibt. Wie viel Wasser befindet sich nach 30 Tagen im Wasserbecken?

81. f ist eine auf $\mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion mit der Ableitung f'. Welche Aussagen sind richtig?
    (a) Die Funktion f hat genau eine Ableitung aber viele Stammfunktionen.
    (b) Sind F und G Stammfunktionen zu f, so ist auch die Summe $F + G$ eine Stammfunktion zu f.
    (c) Ist F Stammfunktion von f, so gilt $f'(x) = F(x)$.
    (d) Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden.

82. Geben Sie eine Stammfunktion F der Funktion f an.
    (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$
    (b) $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$
    (c) $f(x) = 2e^{-2x}$
    (d) (*) $f(x) = \sqrt{5x - 1}$

83. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

   (a) $\int_{-1}^{2}(2x^3+1)dx$

   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos(2x))dx$

84. Gegeben seien die Funktionen f und g mit $f(x)=-x^2+4$ und $g(x)=2x+1$.

   (a) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen.

   (b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

   (c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.

85. Skizzieren Sie:

   (a) $y=-2x+3$

   (b) $-2x+y-5=0$

   (c) $x+8=0$

   (d) die Gerade mit der Steigung 3 durch den Punkt $P(0|3)$

   (e) die Gerade mit der Steigung -2 durch den Punkt $P(2|3)$

   (f) die Gerade durch die Punkte $A(-4|-3)$ und $B(1|3)$

86. (**) Schraffieren Sie in einem Koordinatensystem den Bereich, der durch die Ungleichung $|x-y|<1$ gegeben ist.

87. (**) Überprüfen Sie, ob sich die folgenden Kreise schneiden. Bestimmen Sie hierzu die Mittelpunkte und die Radien. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mittels einer Zeichnung.

$$\begin{array}{rrcl} k_1: & (x+6)^2+(y+4)^2 & = & 64 \\ k_2: & x^2+2x+y^2-16y+40 & = & 0 \end{array}$$

88. (**) Lösen Sie folgendes LGS in Abhängigkeit vom Parameter α :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 18 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & \alpha \end{array}$$

89. Durch die Punkte $P(-3|3)$ und $Q(3|0)$ gehen unendlich viele Parabeln.

   (a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a,b,c der Parabelgleichung $y=ax^2+bx+c$ auf.

   (b) (**) Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems.

90. Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h in der (x_1,x_2)-Ebene:

$$\begin{array}{rrcrcr} g: & 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ h: & x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{array}$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden. Stimmt das Ergebnis mit Ihrer Zeichnung überein?

91. (**) Ein Flugzeug würde bei Windstille mit einer Geschwindigkeit von 150 km/h genau nach Süden fliegen. Es wird jedoch vom Wind, der mit der Geschwindigkeit 30 km/h aus nordöstlicher Richtung bläst, abgetrieben. Stellen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs relativ zur Erde als Pfeil dar.

92. (**) Überprüfen Sie, ob das Viereck mit den Ecken $A(1|4|-1)$, $B(8|8|4)$, $C(4|4|3)$, $D(-3|0|-2)$ ein Parallelogramm ist.

93. (**) Seien P, Q, R und S Punkte im Anschauungsraum. Vereinfachen Sie:

    (a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

    (b) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ}$

    (c) $\overrightarrow{PQ} - (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR}) + \overrightarrow{RS}$

    (d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

    (e) $2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

94. (**) Skizzieren Sie die Gerade g und geben Sie die Gleichung der Geraden in der Form $y = mx + b$ an.
$$g: \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

95. (**) Gegeben sei die Ebene
$$E: \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie p so, dass $P\ (p|2|-2)$ in dieser Ebene liegt.

96. (**) Welche Lagebeziehung haben die Geraden g und h mit
$$g: \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -15 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h: \quad \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
zueinander? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Tagungsteilnehmer 2012 beziehungsweise 2014:

OStR Friedrich ACHTSTÄTTER, LS Stuttgart
StD Annemarie AHRING-NOWAK, Technische Oberschule Stuttgart
Dr. Jochen BERENDES, Geschäftsstelle für Hochschuldidaktik Karlsruhe
StD Achim BOGER, Berufliche Schulen Schwäbisch Gmünd
Prof. Dr. Steffen BOHRMANN, HS Mannheim
Prof. Dr. Manuela BOIN, HS Ulm
Prof. Hanspeter BOPP, HfT Stuttgart
Dr. Isabel BRAUN, HS Karlsruhe
StD Gabriele BROSCH-KAMMERER, Berufliches Schulzentrum Leonberg
StD Heidi BUCK, Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien) Tübingen
Prof. Dr. Eva DECKER, HS Offenburg
StD Ralf DEHLEN, Gewerbliche Schule Kirchheim/Teck
StD Renate DIEHL, IBG Lahr
Prof. Rolf DÜRR, Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien) Tübingen
Prof. Dr. Klaus DÜRRSCHNABEL, HS Karlsruhe
StD Armin EGENTER, Gewerbliche Schule Heidenheim
Prof. Dr. Michael EISERMANN, Uni Stuttgart
StD Wolfgang EPPLER, Walther-Groz-Schule, Kaufmännische Schule Albstadt
StR Andrea ERBEN, Kaufmännische Schule Böblingen
Prof. Dr. Wolfgang ERBEN, HfT Stuttgart
Prof. Dr. Michael FELTEN, HDM Stuttgart
Prof. Dr. Gerhard GÖTZ, DHBW Mosbach
Dr. Daniel HAASE, KIT
Prof. Bernd HATZ, Elly-Heuss-Knapp-Gymnasium Stuttgart
Prof. Dr. Elkedagmar HEINRICH, HS Konstanz
Prof. Dr. Gert HEINRICH, DHBW Villingen-Schwenningen
Prof. Dr. Frank HERRLICH, KIT
StD Dr. Jörg HEUSS, Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (BS) Karlsruhe
Prof. Dr. Stefan HOFMANN, HS Biberach
Dr. Ralph HOFRICHTER, HS Pforzheim
OStR Christa HOLOCH, Johanna-Wittum-Schule Pforzheim
Prof. Dr. Reinhold HÜBL, DHBW Mannheim
Prof. Dr. Andreas KIRSCH, KIT
Prof. Dr. Hans-Dieter KLEIN, HS Ulm
Dr. Michael KÖLLE, RP Tübingen
OStR Bernhard KOOB, Gottlieb-Daimler-Schule 2 Sindelfingen
StR Ulrike KOPIZENSKI, Hubert-Sternberg-Schule Wiesloch
Prof. Dr. Harro KÜMMERER, HS Esslingen
Prof. Dr. Günther KURZ, HS Esslingen
Prof. Dr. Axel LÖFFLER, HS Aachen
Prof. Dr. Frank LOOSE, Uni Tübingen
Prof. Dr. Karin LUNDE, HS Ulm
Prof. Dr. Werner LÜTKEBOHMERT, Uni Ulm
StR Vera MAY, Albert-Einstein-Schule Ettlingen
Prof. Dr. Silke MICHAELSEN, HTWG Konstanz
Prof. Dr. Thomas MORGENSTERN, HS Karlsruhe
Prof. Dr. GERRIT NANDI, DHBW Heidenheim
Prof. Dr. Cornelia NIEDERDRENK-FELGNER, HS Nürtingen-Geislingen
Dipl.-Math. Bernd ODER, HS Aalen
Prof. Dr. Guido PINKERNELL, PH Heidelberg
Prof. Dr. Stephan PITSCH, HS Reutlingen
Prof. Dr. Ivica ROGINA, HS Karlsruhe
Dr. Norbert RÖHRL, Uni Stuttgart
Prof. Dr. Ralf ROTHFUSS, HS Esslingen
StD Dr. Torsten SCHATZ, Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien) Tübingen

Prof. Dr. Axel Schenk, HS Heilbronn
Dipl.-Math. Jochen Schröder, HS Karlsruhe
Prof. Dr. Axel Stahl, HS Esslingen
StR Martin Stöckel, Carl-Engler-Schule Karlsruhe
StD Ulla Sturm-Petrikat, Oskar-von-Nell-Breuning-Schule Rottweil
Prof. Dr. Kirstin Tschan, HS Furtwangen
Prof. Dr. Ursula Voss, HS Reutlingen
Prof. Hans-Peter Voss, Geschäftsstelle für Hochschuldidaktik Karlsruhe
MR Steffen Walter, Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Stuttgart
StD Bruno Weber, LS Stuttgart
StD Dr. Thomas Weber, Carl-Engler-Schule Karlsruhe
Prof. Dr. Frédéric Weller, HS Esslingen
Prof. Dr. Holger Wengert, DHBW Stuttgart
StD Karen Wunderlich, Ministerium für Kultus und Sport, Stuttgart
StD Rita Wurth, Mettnau-Schule Radolfzell

Satz:

Dr. Isabel Braun, Projekt 'SKATING', HS Karlsruhe
Dipl.-Math. Jochen Schröder, HS Karlsruhe

Die Arbeitsgruppe cosh dankt der Studienkommission für Hochschuldidaktik an Hochschulen für Angewandte Wissenschaften in Baden-Württemberg für die Gewährung von Fördermitteln im Rahmen der Projekte „Heterogenität als Chance – Entwicklung und Erprobung tutorieller Betreuungsmodelle“ und „Initiative zur hochschuldidaktischen Professionalisierung der Lehrenden im Zusammenhang mit dem Hochschulausbau“, welche durch das Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg gefördert werden.